



TITLE:

PW型リーマン面上のHardy族について: 不変部分空間定理が成立する場合としない場合(函数環に関連した諸問題)

AUTHOR(S):

林, 実樹広

---

CITATION:

林, 実樹広. PW型リーマン面上のHardy族について: 不変部分空間定理が成立する場合としない場合(函数環に関連した諸問題). 数理解析研究所講究録 1984, 523: 66-75

ISSUE DATE:

1984-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98492>

RIGHT:

# PW型リーマン面上のHardy族について —

不変部分空間定理が成立する場合としない場合

北大 理 林 実樹広  
(Mikihiro Hayashi)

1.  $R$  を平面領域, 又は定数でない有界正則関数をもつようなリーマン面とする. 以下では, 平面領域に限, ておいても十分であるから, 単一領域と呼ぶことにする. 領域  $R$  が単位円  $\{ |z| < 1 \}$  の場合, Hardy族  $H^p(R)$  の (弱\*) 閉不変部分空間  $M$  (本講では,  $H^\infty(R)$ -加群のこととこう呼ぶ) は, 内部関数  $\phi$  を用いて,

$$(1.1) \quad M = \phi H^p(\mathbb{D})$$

と表わされる. これは  $p = 2$  の場合に, ヒルベルト空間上の作用素の不変部分空間を考察して Beurling が与えた結果である.  $R$  が多重連結な領域とした場合,  $H^p(R)$  の不変部分空間  $M$  の最大共通内部因子を  $\phi$  とすると,

$$(1.2) \quad M \subseteq \phi H^p(R, \phi_f^{-1})$$

となることはすぐわかる. ここで, 内部関数  $\phi$  は一般には多価であり,  $\phi_f$  は  $\phi$  の周期である.  $H^p(R, \phi_f^{-1})$  は多価  $H^p$  関数の族で内部関数  $\phi$  と逆の周期をもつもの全体である.  $\phi$  と  $H^p(R, \phi_f^{-1})$  の元の周期が互いに打消し合って  $\phi H^p(R, \phi_f^{-1})$  が

1価となり,  $H^p(R)$  の不変部分空間を構成することに注意した。  
 1). 領域  $R$  が有限連結の場合, (1.2) で等号が成立することは  
 60年代に示されている。70年代になって, Neville<sup>[7]</sup>により,  
 ある種の無限領域の場合には (1.2) で等号となること  
 が示され, その結果は, 荷見[2,3], Neville[8]により更に  
 拡張された。同じ頃, Widom は次の性質をみたす領域  $R$  の  
 特徴付けを立えていた ([9,10])

(1.3) すべての周期  $\delta$  について,  $H^\infty(R, \delta)$  が 0 以外の元を含む。

リーマン球と全平面という特殊な場合を除けば, (1.3) から  
 $H^\infty(R)$  が定数でない元を含むことがすぐになる。 ( $\because$

$H^\infty(R, \delta) \cap H^\infty(R, \delta^{-1}) \subseteq H^\infty(R)$  )。また, Neville, 荷見等  
 により考えられた領域も (1.3) をみたすものであつた。年代  
 が遡るにつれて, 50年代に Parnau は次の条件を満たす領域を  
 考えている。  $G(z, \zeta)$  を  $R$  上の Green 関数, 1点  $\phi$  を固定し  
 て,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (G(z, \phi) + i^* G(z, \phi)) \quad , \quad \text{但 } \phi \text{ は共役調和関数,}$$

の零点を  $a_n$ , その位数を  $c_n$  としたとき

$$(1.4) \quad \sum_n c_n G(\phi, a_n) < \infty$$

が成立する。Widom による (1.3) の特徴付けにはこの (1.4) が現  
 われる。厳密に言えば, (1.3) と (1.4) の間には相異があるが,

本質的に同値であることが、荷見[3]により示されている。  
 以下では、(1.3)と(1.4)を区別せずこれを $\alpha$ をみたす領域を  
 Parreau-Widom型(略して, PW型)と呼ぶことにする。(注:  
 領域 $R$ が双曲型で、ポテンシャル論的に正則な場合には(1.3)  
 と(1.4)は同値である)。

さて問題は, PW型で一般に(1.2)において等号が成立するか  
 どうかである。以下で、必ずしも等号の成立しない場合が  
 あることを示す。同じ例で、H. and M. Rieszの定理の拡張  
 も成立しないことがわかるので合わせて述べることにする。

2. 上で用いた記号の定義を述べておく。領域 $R$ の中に1  
 点 $\odot$ を固定する。 $\odot$ を基点とする基本群を $\pi_1(R)$ 、 $\pi_1(R)$ から  
 $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ への群準同型(characterと呼ぶ)を $\pi_1(R)^*$   
 で表わす。 $R$ 上の多価有理型関数で、 $|f|$ が1値となるものの  
 周期は $\pi_1(R)^*$ の元を用いて完全に記述できる。すなわち、  
 点 $\odot$ における関数要素 $f_0$ を決めて、 $f$ は $f_0$ の解析接続<sup>全体</sup>とみな  
 する。 $\odot$ を起点とする閉曲線 $C$ に沿って $f_0$ の解析接続を $f_C$   
 とすると

$$(2.1) \quad f_C = \gamma_f(C) f_0$$

という関係がある。ここで、 $\gamma_f \in \pi_1(R)^*$ で、 $f$ によって決ま  
 る character である。前節で述べた、内部関数 $f$ の周期 $\gamma_f$

とはこの character のことである.  $\sigma \in \pi_1(R)^*$  を与えたとき  
に,  $\sigma$  を character とする多価関数  $f$  で,

$$(2.2) \quad |f|^p \leq u, \quad u: \text{調和} \quad (0 < p < \infty)$$

$$|f| \text{ 有界} \quad (p = \infty)$$

となるものの全体を  $H^p(R, \sigma)$  で表わす.

$$\|f\|_p = \inf \{ u(0)^{1/p} : u \text{ は (2.2) をみたす} \}$$

とかくと, これは  $H^p(R, \sigma)$  の  $p$ -norm に与える.  $R$  が単位円の

とせば,  $0$  として原点を取れば, 普通の  $L^p$ -norm に一致する.

3. はじめに述べた領域  $R$  は次のようにして与える. 単位  
円  $\mathbb{D} = \{ |z| < 1 \}$  に含まれ, 原点に収束するような円周族の列

$$\Delta_n = \{ z : |z - \alpha_n| < r_n \}$$

で, 互いに共通分をもたないものを考える.

$$R = \mathbb{D} - \{0\} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$

とかくと,  $\alpha_n, r_n$  を適当にとることにより

$$(3.1) \quad R \text{ は PW 型}$$

$$(3.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{\alpha_n} < \infty$$

を満たすものを作れば同族は達成されたことになる. 実際,

$$M = \{ f \in H^\infty(R) : f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z} dz = 0 \}$$

とかくと,  $M$  は  $H^\infty(R)$  の弱\*閉イデアルとなることを (3.1) に

より保障される。また、 $M$  の最大共通内部因子  $z$  とすると  $z \equiv \text{const.}$  となる。これは、仮に  $z \neq \text{const}$  とすると、原点が極大イデアル空間の中で弱\*閉  $\text{analytic disc } W$  の中心となることをかきめせる。 $\hat{z}$  が  $W$  と定数でないことはすぐわかるので、正則関数  $z$  の閉写像ということより  $\hat{z}(W)$  が  $z=0$  の近傍を含むことになり事実には反する。従って、 $M$  は (1.2) で等号の成立しない不変部分空間である。

$\alpha_n, r_n$  の選び方であるが、収束級数  $\sum d_n < \infty$  ( $0 < d_n < 1$ ) を一つ固定する。次に  $\alpha_n = 2^{-\nu_n}$  ( $\nu_n$ : 自然数の増加列),  $r_n = d_n \alpha_n$  とおく。  $\nu_n$  が十分速く発散すると  $R$  が PW 型になることが示される。一方 (3.2) は  $\nu_n$  のとりきによりなり。

$R$  が PW 型であることを示すには次のようにする。

$$I_n = [\alpha_n - r_n, \alpha_n + r_n]$$

とすると、

$$\tilde{R} = \mathbb{D}^2 - \{0\} - \bigcup_n I_n \quad (\mathbb{D}^2: 1-2 \text{ 次元球})$$

という補助的領域を考える。  $R \subset \tilde{R}$  であることから、  $\tilde{R}$  が PW 型ならば  $R$  も PW 型となることから (1.3) により示される。

$\tilde{R}$  を考えたのは、  $\tilde{R}$  上の Green 関数は具体的に書くことができるためである。これを評価して  $\nu_1 \rightarrow \infty, \nu_2 \rightarrow \infty, \nu_3 \rightarrow \infty$  のとき、

$$\sum \tilde{G}(\infty, a_n) \rightarrow 0$$

を示めせる. 従って, Perreau の条件 (1.4) が満たれる. かわ  
しい計算については [6].

上の作りかたにおいて, 更に  $p_n$  という非減少自然数列で

$$(3.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

という性質を満たすものであれば,  $r_n = d_n \alpha_n^{p_n}$  において  $R$   
が PW 型になることを示めせる. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n / \alpha_n^{p_n} < \infty, \quad \forall p_n$$

を満たす.  $p_n = 1 / \log(1 + \frac{1}{n})$  とすれば (3.3) を満たしてかつ

$p_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるから,  $z=0$  における  $k$  階の点微分

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$$

は  $0$  である. したがって,

$$J_{\infty} = \{f \in H^{\infty}(R) : f^{(k)}(0) = 0 \text{ for all } k\}$$

とかくと,  $J_{\infty}$  は  $0$  で  $T_{\infty}$ -ideal で,  $J_{\infty}$  の最大共通内部因子  
は定数となることを示めせる. 従って, (1.2) における包含  
関係は  $J_{\infty}$  については余次元が無限大になる, という.

4. (1.2) でつねに等号が成立している PW 型の領域では

H. and M. Riesz の定理の一般化を示めせる ([4]).

領域  $R$  が PW 型 のとき,  $H^{\infty}(R)$  のゼロフ境界  $\mathcal{H}(R)$  はリ  
ーマン面の理想境界という Wiener の調和境界  $\bar{\omega}(R)$  と一致す  
る.  $\bar{\omega}(R)$  上には調和測度と呼ばれる確率測度  $\omega_2$  があつて,

$R$  上の有界調和関数はすべて

$$(4.1) \quad u(z) = \int_{\mathbb{R}} u(b) d\omega_z(b)$$

と表わすことができる。  $\omega_z$  はすべての  $z \in R$  について互いに絶対連続なので、

$$P_z(b) = \frac{d\omega_z}{d\omega_0}(b)$$

とみると、これは単位円というポアソン核に対応している。

H. and M. Riesz の定理の一般化は次のように述べられる。

$$(4.2) \quad \mu \in H^\infty(R) \text{ に直交する } \mathbb{R}(R) \text{ 上の測度とす、これは、 } \mu \text{ の Lebesgue 分解 } \mu = \mu_a + \mu_s, \quad \mu_a \ll \omega_0, \quad \mu_s \perp \omega_0 \text{ に対して、 } \mu_a \text{ と } \mu_s \text{ が } H^\infty(R) \text{ に直交する。}$$

前節で与えた例ではこの性質が成り立たない。実際、

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z} dz$$

で与えられる測度を  $\mathbb{R}(R)$  上に lift (上げ) すると  $\mu_a$  とすると、

$\mu$  は  $\omega_0$  に対して絶対連続である。一方

$$\mu_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_n} \frac{f(z)}{z - a_n} dz$$

で与えられる測度を  $\mathbb{R}(R)$  へ lift して、その弱\*集積点の一つを  $\mu_s$  とすると、 $\mu_s$  が  $z=0$  における (複素) 表現測度となることから、次のようにしてわかる: 与えられた



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw - \sum_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_k} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$= f_0(z) - \sum_k f_k(z)$$

と分解する ([1]). 留数定理により

$$\mu_n(f) = f_0(\alpha_n) - \sum_{k \neq n} f_k(\alpha_n)$$

となる.  $\delta, 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f) = f_0(0) - \sum_k f_k(0) = f(0).$$

$\mu_s$  の台は  $\widehat{\Sigma}^{-1}(0) \cap \text{III}(R)$  上にあり,  $\omega_0(\widehat{\Sigma}^{-1}(0)) = 0$  であるから,  $\mu_s \perp \omega_0$ .  $\delta, 2$ ,  $\mu = \mu_a - \mu_s$  は  $H^\infty(R)$  に直交するが,  $\mu_a, \mu_s$  は直交しない.

5. Widom は次の定理を考えた.

$$m^p(r) = \sup \{ |f(0)| : f \in H^p(R, r), \|f\|_p \leq 1 \}.$$

領域  $R$  が PW 型ならば

$$(5.1) \quad \inf \{ m^p(r) : r \in \pi_1(R)^* \} > 0$$

となることを示している. 更に,  $\pi_1(R)^*$  はコンパクト・アーベル群  $\mathbb{T}^d$  ( $d$  は高々可算濃度) に同型であるので, この位相で  $\pi_1(R)^*$  を位相空間と考えると,  $m^\infty(r)$  が連続という条件が意味をもつ. この条件も Widom が導入したものであり, PW 型の場合には, (1.2) で等号が成立することと,  $m^\infty(r)$  が連続となることは本質的に同値であることが示されている.

([5]). 従って, 先に述べた例では  $w^\infty(r)$  も連続でない.

最後に, まだ未解決と思われる問題を上げておきます.

(5.2)  $H^\infty(R)$  は  $H^p$  で dense?

(5.3)  $w \in L^1(\alpha)$ ,  $w \geq 0$   $n \in \mathbb{Z}$

$$\inf_{f \in H_0^\infty(R)} \int |1 - f| w d\alpha = \left( \frac{1}{m^p(r_{w/p})} \right)^p \exp\left(\int \log w d\alpha\right)?$$

(5.4)  $I(R) \neq H^\infty(R)$  ならば常に  $\dim H^\infty(R)/I(R) = \infty$ ?

(5.5)  $I(R)$  と  $H^\infty(R)$  の間にある弱\* 閉不変部分空間全体と  $\mathcal{H}^p(R, \sigma_f^{-1})$  と  $\mathcal{H}^p(R, \sigma_f^{-1})$  の間にある (弱\*) 閉不変部分空間との間には, 包含関係を保つような 1:1 対応があるか?

はじめの 2 つは,  $R$  が PW 型で (1.2) で等号が成立していれば成立することはおわか, という ([4]). 一般の PW 型の領域で成立するかどうか興味あり. 後の 2 つについては記号の意味を説明する.  $I(R)$  は  $H^\infty(R)$  に含まれるイデアルで, その最大<sup>共通</sup>内部因子が定数という性質をもつもののうち最小のものである. その存在はおわか, という.  $\mathcal{H}^p(R, \sigma_f^{-1})$  は  $I(R) \mathcal{H}^p(R, \sigma_f^{-1})$  の closed linear span である.

最近, 荷見先生による Lecture Note が Springer から出たので, 興味ある方はそちらも参考になることと思っております. ([11]).

1. M. Behrens, The corona conjecture for a class of infinitely connected domains, Bull. Amer. Math. Soc. 76(1970), 387-391.
2. M. Hasumi, Invariant subspaces on open Riemann surfaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 24,4 (1974), 240-255.
3. \_\_\_\_\_, Invariant subspaces on open Riemann surfaces, II, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26,2 (1976), 273-299
4. M. Hayashi, Szegő's theorem on Riemann surfaces, Hokkaido Math. J. 10(1981) Sp., 242-253.
5. \_\_\_\_\_, Invariant subspaces on Riemann surfaces of Parreau-Widom type, Trans. Amer. Math. Soc. 279(1983), 737-757.
6. \_\_\_\_\_, An example of a domain of Parreau-Widom type, to appear.
7. C.W. Neville, Invariant subspaces on Hardy classes on infinitely connected plane domains, Bull. Amer. Math. Soc. 78(1972), 857-860.
8. \_\_\_\_\_, Invariant Subspaces of Hardy Classes on Infinitely Connected Open Surfaces, Memoirs Amer. Math. Soc. Number 160, 1975.
9. H. Widom, The maximum principle for multiple-valued analytic functions, Acta Math. 126(1971), 63-82.
10. \_\_\_\_\_,  $H_p$  sections of vector bundles over Riemann surfaces, Ann. of Math. 94 (1971), 305-324.
11. M. Hasumi, Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces, LNM #1027, 1983, Springer-Verlag.